Exercices supplémentaires : Complexes

Partie A : Calculs et propriétés algébriques

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+3i)-(2-i)$$
$$z_2 = (5-i)(7+4i)$$
$$z_3 = \left(\frac{1}{2}-4i\right)(i+1)$$
$$z_4 = (2+i)^2(7-5i)$$
$$z_5 = \frac{1}{1+i}$$
$$z_6 = \frac{1}{\sqrt{3}-2i}$$
$$z_7 = \frac{1+i}{3-2i}$$
$$z_8 = \frac{8i-1}{2-3i}$$
$$z_9 = 2i+\frac{5}{i}$$
$$z_{10} = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$$

Exercice 2

On considère les nombres complexes $z_1 = 2+3i$ et- $z_2 = 5-i$.

Calculer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 \times z_2^2 \;;\; \frac{z_2}{z_1} \;;\; \frac{z_1}{z_2} \;;\; \frac{z_1-1}{z_2-4i} \;;\; \overline{z_1}\times\overline{z_2} \;;\; \frac{\overline{z_1}-1}{z_2+1}$$

Exercice 3

Pour quelles valeurs du réel λ, le nombre complexe $z = (\lambda+i)[\lambda+5-i(\lambda-7)]$ est-il imaginaire pur ?

Exercice 4

A quelles conditions sur les réels a et b le nombre complexe $z = \big(2a-b-i(a+b)\big)\big(-a-i(a+b)\big)$ est-il réel ?

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Vous donnerez les résultats sous forme algébrique.

$2iz-3 = z+i$

$3z(z+i) = -iz$

$(3z-i)(z+2+3i) = 0$

$-\frac{z}{iz+1}+\frac{3z}{z-i} = 3+i$

$\frac{z-1}{iz+3} = 4i$

Exercice 6

Déterminer dans chaque cas, l'ensemble des points M d'affixe z tels que le point M' d'affixe Z appartienne à l'axe des réels.

a) $Z = z^2-2\bar{z}+1$
b) $Z = (\bar{z}-3)(iz+2)$
c) $Z = i\times\frac{1+z}{1-z}$
d) $Z = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i}$

Partie B : Equations du second degré

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$z^2-4z+53 = 0$

$z^2+2z+6 = 0$

$9z^2-6z+37 = 0$

$z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+\sqrt{2} = 0$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2+6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)+13=0$$

Exercice 9

On considère le polynôme $P(z)=z^3-12z^2+48z-128$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1) Calculer $P(8)$.
2) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-8)(az^2+bz+c)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Exercice 10

On considère la fonction $f: z\mapsto z^4-\sqrt{2}\times z^3-4\sqrt{2}\times z-16$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1) Déterminer a et b réels tels que $f(z)=(z^2+4)(z^2+az+b)$ pour tout complexe z.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^4-5z^2-18=0$.

<u>Partie C : Module, argument, forme trigonométrique, forme exponentielle</u>

Exercice 12

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants

$z_1=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

$z_2=(1+i)^2$

$z_3=(-3+3i)^2$

$z_4=(\sqrt{3}+i)(5+5i\sqrt{3})$

$z_5=\dfrac{1+i}{3\sqrt{3}+3i}$

$z_6=\dfrac{4i}{-1+i}$

Exercice 13

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$z_1=-1-i$

$z_2=5i$

$z_3=1-i\sqrt{3}$

$z_4=(1-i)(1+i\sqrt{3})$

$z_5=\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^2$

Exercice 14

On considère le nombre complexe $z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

1) Ecrire z^2 sous forme algébrique.
2) Déterminer le module et un argument de z^2.
3) En déduire le module et un argument de z.
4) Déterminer à l'aide des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction exercices supplémentaires

Partie A : Calculs et propriétés algébriques

Exercice 1

$z_1 = 1 + 3i - 2 + i = \boxed{-1 + 4i}$

$z_2 = (5 - i)(7 + 4i) = 35 + 20i - 7i - 4i^2 = 35 + 13i + 4 = \boxed{39 + 13i}$

$z_3 = \left(\frac{1}{2} - 4i\right)(i + 1) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - 4i^2 - 4i = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} + 4 - 4i = \boxed{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}i}$

$z_4 = (2 + i)^2(7 - 5i) = (4 + 4i + i^2)(7 - 5i) = (3 + 4i)(7 - 5i) = 21 - 15i + 28i + 20 = \boxed{41 + 13i}$

$z_5 = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{1^2 - i^2} = \frac{1 - i}{1 + 1} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

$z_6 = \frac{1}{\sqrt{3} - 2i} = \frac{\sqrt{3} + 2i}{3 - (2i)^2} = \frac{\sqrt{3} + 2i}{3 + 4} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7}i}$

$z_7 = \frac{1 + i}{3 - 2i} = \frac{(1 + i)(3 + 2i)}{9 + 4} = \frac{4 + 2i + 3i - 2}{13} = \boxed{\frac{2}{12} + \frac{5}{13}i}$

$z_8 = \frac{8i - 1}{2 - 3i} = \frac{(8i - 1)(2 + 3i)}{4 + 9} = \frac{16i - 24 - 2 - 3i}{13} = \boxed{-2 + i}$

$z_9 = 2i + \frac{5}{i} = 2i + \frac{5i}{i^2} = 2i - 5i = \boxed{-3i}$

$z_{10} = \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 = \left(\frac{(1 + i)(2 + i)}{4 + 1}\right)^2 = \left(\frac{2 + i + 2i - 1}{5}\right)^2 = \frac{(1 + 3i)^2}{25} = \frac{1 + 6i + (3i)^2}{25} = \boxed{-\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i}$

Exercice 2

On considère les nombres complexes $z_1 = 2 + 3i$ et- $z_2 = 5 - i$.

Calculer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 \times z_2^2 = (2 + 3i)(5 - i)^2 = (2 + 3i)(25 - 10i + i^2) = (2 + 3i)(24 - 10i) = 48 - 20i + 72i - 30i^2$
$= \boxed{78 + 52i}$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 - i}{2 + 3i} = \frac{(5 - i)(2 - 3i)}{4 + 9} = \frac{10 - 15i - 2i + 3i^2}{13} = \boxed{\frac{7}{13} - \frac{17}{13}i}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{5 - i} = \frac{(2 + 3i)(5 + i)}{25 + 1} = \frac{10 + 2i + 15i + 3i^2}{26} = \boxed{\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i}$

$\frac{z_1 - 1}{z_2 - 4i} = \frac{2 + 3i - 1}{5 - i - 4i} = \frac{(1 + 3i)(5 + 5i)}{(5 - 5i)(5 + 5i)} = \frac{5 + 5i + 15i + 15i^2}{25 + 25} = \frac{-10 + 20i}{50} = \boxed{-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i}$

$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = (2 - 3i)(5 + i) = 10 + 2i - 15i - 3i^2 = \boxed{13 - 13i}$

$\frac{\overline{z_1} - 1}{z_2 + 1} = \frac{2 - 3i - 1}{5 - i + 1} = \frac{(1 - 3i)(6 + i)}{(6 - i)(6 + i)} = \frac{6 + i - 18i - 3i^2}{36 + 1} = \boxed{\frac{9}{37} - \frac{17}{37}i}$

Exercice 3

Commençons par calculer la forme algébrique de z :

$z = (\lambda + i)[\lambda + 5 - i(\lambda - 7)]$
$= (\lambda + i)(\lambda + 5 - i\lambda + 7i)$
$= \lambda^2 + 5\lambda - i\lambda^2 + 7i\lambda + i\lambda + 5i - i^2\lambda + 7i^2$
$= \lambda^2 + 5\lambda - i\lambda^2 + 8i\lambda + 5i + \lambda - 7$
$= \lambda^2 + 6\lambda - 7 + i(5 + 8\lambda - \lambda^2)$

Un complexe est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Ici, ceci signifie que $\lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0$. $\Delta = 64$ donc il y a deux solutions $\lambda_1 = \frac{-6+8}{2} = 1$ et $\lambda_2 = \frac{-6-8}{2} = -7$.

Exercice 4

Commençons par écrire z sous forme algébrique :

$z = \big(2a - b - i(a + b)\big)\big(-a - i(a + b)\big)$
$= -2a^2 - 2ai(a + b) + ab + ib(a + b) + ia(a + b) + i^2(a + b)^2$
$= -2a^2 + ab - (a + b)^2 + i(-2a^2 - 2ab + ab + b^2 + a^2 + ab)$
$= -2a^2 + ab - a^2 - 2ab - b^2 + i(b^2 - a^2)$

$= -3a^2 - ab - b^2 + i(b-a)(b+a)$
z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle donc $(b-a)(b+a) = 0$.
Ceci donne donc deux conditions : soit $a = b$, soit $a = -b$.

Exercice 5

$2iz - 3 = z + i \Leftrightarrow 2iz - z = 3 + i \Leftrightarrow (2i-1)z = 3 + i \Leftrightarrow z = \dfrac{3+i}{-1+2i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(3+i)(-1-2i)}{1+4}$
$\Leftrightarrow z = \dfrac{-3-6i-i-2i^2}{5} \Leftrightarrow \boxed{z = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i}$
$3z(z+i) = -iz \Leftrightarrow 3z(z+i) + iz = 0 \Leftrightarrow z(3(z+i)+i) = 0 \Leftrightarrow z(3z+4i) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $3z + 4i = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{z = 0 \text{ ou } z = -\dfrac{4i}{3}}$

$(3z-i)(z+2+3i) = 0 \Leftrightarrow 3z - i = 0$ ou $z + 2 + 3i = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = \dfrac{i}{3} \text{ ou } z = -2-3i}$
$-\dfrac{z}{iz+1} + \dfrac{3z}{z-i} = 3 + i \Leftrightarrow -\dfrac{z(z-i)}{(iz+1)(z-i)} + \dfrac{3z(iz+1)}{(iz+1)(z-i)} = \dfrac{(3+i)(iz+1)(z-i)}{(iz+1)(z-i)}$
$\Leftrightarrow -(z^2 - iz) + 3iz^2 + 3z = (3iz + 3 + i^2z + i)(z - i)$ pour tout z tel que $iz + 1 \neq 0$ et $z - i \neq 0$
$\Leftrightarrow -z^2 + iz + 3iz^2 + 3z = 3iz^2 - 3zi^2 + 3z - 3i + i^2z^2 - iz \times i^2 + iz - i^2$
$\Leftrightarrow -z^2 + iz + 3iz^2 + 3z = 3iz^2 + 3z + 3z - 3i - z^2 + iz + iz + 1$
$\Leftrightarrow -3z - 1 + 3i - iz = 0$
$\Leftrightarrow z(-3-i) = 1 - 3i$
$\Leftrightarrow z = \dfrac{1-3i}{-3-i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1-3i)(-3+i)}{9+1} \Leftrightarrow z = \dfrac{-3+i+9i-3i^2}{10} \Leftrightarrow z = i$
Or i est une valeur interdite donc $\boxed{S = \emptyset}$
$\dfrac{z-1}{iz+3} = 4i \Leftrightarrow z - 1 = 4i(iz+3)$ pour tout z tel que $iz + 3 \neq 0$
$\Leftrightarrow z - 1 = 4i^2z + 12i \Leftrightarrow z - 1 = -4z + 12i \Leftrightarrow 5z = 1 + 12i \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5}i$
Ce n'est pas une valeur interdite donc $\boxed{S = \left\{\frac{1}{5} + \frac{12}{5}i\right\}}$

Exercice 6

a) On considère la forme algébrique $a + ib$ $(a; b \in \mathbb{R})$ de z et on détermine la forme algébrique de Z :
$Z = z^2 - 2\bar{z} + 1 = (a+ib)^2 - 2(a-ib) + 1 = a^2 + 2iab + i^2b^2 - 2a + 2ib + 1$
$= a^2 - 2a + 1 - b^2 + 2ib(a+1)$
$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow 2b(a+1) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $a = -1$
L'ensemble des points M d'affixe z tels que M' d'affixe Z appartiennent à l'axe des réels est la réunion de deux droites : la droite d'équation $y = 0$ et la droite d'équation $x = -1$.

b) $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
$Z = (\bar{z} - 3)(iz + 2) = (a - ib - 3)(ia + i^2b + 2) = ia^2 + i^2ab + 2a - i^2ab - i \times i^2b^2 - 2ib - 3ia - 3i^2b - 6$
$= -ab + 2a + ab + 3b - 6 + i(a^2 + b^2 - 2b - 3a)$
$= 2a + 3b - 6 + i(a^2 + b^2 - 2b - 3a)$
$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b - 3a = 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + b^2 - 2b + 1 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \left(a - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (b-1)^2 = \dfrac{9}{4} + 1 \Leftrightarrow \left(a - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (b-1)^2 = \dfrac{13}{4}$
Le point M appartient donc au cercle de centre $A\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Comme il y a équivalence, tous les points sont atteints.

c) Par définition de Z, on doit avoir $z \neq 1$. Par ailleurs, en utilisant $z = a + ib$ $(a; b \in \mathbb{R})$, on a
$Z = i \times \dfrac{1+z}{1-z} = i \times \dfrac{1+a+ib}{1-a-ib} = \dfrac{i(1+a+ib)(1-a+ib)}{(1-a)^2+b^2} = \dfrac{i(1-a+ib+a-a^2+iab+ib-iab+i^2b^2)}{(1-a)^2+b^2}$
$= \dfrac{i(1-a^2-b^2+2ib)}{(1-a)^2+b^2} = i \times \dfrac{1-a^2-b^2}{(1-a)^2+b^2} - \dfrac{2b}{(1-a)^2+b^2}$
$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$
Donc le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1. Cependant, on doit avoir $z \neq 1$ donc le cercle est privé du point A d'affixe 1.

d) On a $z \neq 3-i$. On pose $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$Z = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i} = \frac{2i(a+ib)-4+2i}{a+ib-3+i} = \frac{(-4-2b+2i+2ia)(a-3-(1+b)i)}{(a-3)^2+(b+1)^2}$$

$$= \frac{-4a+12+4(1+b)i-2ab+6b+2b(1+b)i+2ia-6i-2(1+b)i^2+2ia^2-6ia-2a(1+b)i^2}{(a-3)^2+(b+1)^2}$$

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow 4(1+b)+2b(1+b)+2a-6+2a^2-6a = 0$

$\Leftrightarrow 4+4b+2b+2b^2+2a-6+2a^2-6a = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2-4a+2b^2+6b = 2 \Leftrightarrow a^2-2a+b^2+3b = 1 \Leftrightarrow a^2-2a+1-1+b^2+3b+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+\left(b+\frac{3}{2}\right)^2 = 1+1+\frac{9}{4} \Leftrightarrow (a-1)^2+\left(b+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$

Le point M appartient au cercle de centre $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{2}$ privé du point A d'affixe $3-i$.

<u>Partie B : Equations du second degré</u>

Exercice 7

$z^2-4z+53 = 0 : \Delta = (-4)^2-4\times 53 = -196 = -14^2$ donc l'équation a deux solutions complexes

$z_1 = \frac{4+14i}{2} = 2+7i$ et $z_2 = 2-7i$. $\boxed{S = \{2+7i; 2-7i\}}$

$z^2+2z+6 = 0 : \Delta = -20$ donc l'équation a deux solutions complexes : $\boxed{S = \{-1+i\sqrt{5}; -1-i\sqrt{5}\}}$

$9z^2-6z+37 = 0 : \Delta = -1296 = -36^2$ donc l'équation a deux solutions complexes

$\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}+i\times\frac{1}{3}; \frac{1}{3}-i\times\frac{1}{3}\right\}}$

$z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2} = 0 : \Delta = (1+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+2-4\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2$

Il y a deux solutions réelles : $z_1 = \frac{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}$ $\boxed{S = \{1; \sqrt{2}\}}$

Exercice 8

On effectue un changement de variables : $Z = \frac{z-3i}{z+2}$ pour $z \neq -2 : Z^2+6Z+13 = 0$.

$\Delta = -16$ donc il y a deux valeurs possibles pour $Z : Z_1 = \frac{-6+4i}{2} = -3+2i$ et $Z_2 = -3-2i$.

On est donc ramené à deux équations : avec $z \neq -2$

$\frac{z-3i}{z+2} = -3+2i \Leftrightarrow z-3i = (-3+2i)(z+2) \Leftrightarrow z-3i = -3z-6+2iz+4i$

$\Leftrightarrow 4z-2iz = -6+7i \Leftrightarrow z = \frac{-6+7i}{4-2i} \Leftrightarrow z = \frac{(-6+7i)(4+2i)}{16+4} \Leftrightarrow z = \frac{-24-12i+28i-14}{20}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{38}{20}+\frac{16}{20}i \Leftrightarrow z = -\frac{19}{10}+\frac{4}{5}i$

$\frac{z-3i}{z+2} = -3-2i \Leftrightarrow z-3i = (-3-2i)(z+2) \Leftrightarrow z-3i = -3z-6-2iz-4i$

$\Leftrightarrow 4z+2iz = -6-i \Leftrightarrow z = \frac{-6-i}{4+2i} \Leftrightarrow z = \frac{(-6-i)(4-2i)}{16+4} \Leftrightarrow z = -\frac{26}{20}+\frac{8}{20}i \Leftrightarrow z = -\frac{13}{10}+\frac{2}{5}i$

$\boxed{S = \left\{-\frac{19}{10}+\frac{4}{5}i; -\frac{13}{10}+\frac{2}{5}i\right\}}$

Exercice 9

1) $P(8) = 8^3-12\times 8^2+48\times 8-128 = 512-768+384-128 = 0$
2) 8 est une racine de P donc P peut se factoriser par $z-8$.

$P(z) = (z-8)(az^2+bz+c) \Leftrightarrow P(z) = az^3+(b-8a)z^2+(c-8b)z-8c$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b-8a = -12 \\ c-8b = 48 \\ -8c = -128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 16 \end{cases}$ donc $\boxed{P(z) = (z-8)(z^2-4z+16)}$

3) Dans $\mathbb{C}$:

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-8)(z^2-4z+16) = 0 \Leftrightarrow z-8 = 0$ ou $z^2-4z+16 = 0$

La première équation donne $z = 8$.

La seconde équation : $\Delta = -48$ donc il y a deux solutions complexes $z_1 = \frac{4+4i\sqrt{3}}{2} = 2+2i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2-2i\sqrt{3}$

Finalement $\boxed{S = \{8; 2+2i\sqrt{3}; 2-2i\sqrt{3}\}}$

Exercice 10

1) Pour tout complexe z :

$f(z) = (z^2+4)(z^2+az+b) \Leftrightarrow f(z) = z^4+az^3+(b+4)z^2+4az+4b$

Par identification : $\begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b+4 = 0 \\ 4a = -4\sqrt{2} \\ 4b = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = -4 \end{cases}$ donc $\boxed{f(z) = (z^2+4)(z^2-z\sqrt{2}-4)}$

2)

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z^2+4 = 0$ ou $z^2-\sqrt{2}z-4 = 0$

Pour la première équation : $\Delta = -16$ donc il y a deux solutions complexes : $z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i$

Pour la deuxième équation : $\Delta = 18$ donc il y a deux solutions réelles : $z_3 = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ et $z_4 = \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Finalement $\boxed{S = \{2i; -2i; 2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}}$

Exercice 11

On effectue un changement de variable en posant $Z = z^2$. On résout alors $2Z^2-5Z-18 = 0$.

$\Delta = 169$ donc il y a deux valeurs possibles pour Z : $Z_1 = \frac{5+13}{4} = \frac{9}{2}$ et $Z_2 = \frac{5-13}{4} = -2$.

On doit donc résoudre $z^2 = \frac{9}{2}$ et $z^2 = -2$.

$$z^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{9}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow z = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ ou } z = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$z^2 = -2 \Leftrightarrow z^2 = (i\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$

Finalement, $\boxed{S = \left\{\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}\right\}}$

<u>Partie C : Module, argument, forme trigonométrique, forme exponentielle</u>

Exercice 12

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants

$z_1 = \sqrt{6}-i\sqrt{2}$: $|z_1| = \sqrt{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

Pour l'argument de z_1 que nous notons θ_1 : $\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{\theta_1 = -\frac{\pi}{6}\ \ [2\pi]}$

$z_2 = (1+i)^2$: $|z_2| = |1+i|^2 = \sqrt{1^2+1^2}^2 = \boxed{2}$

Pour l'argument de z_2, noté θ_2, on commence par développer z_2 pour avoir sa forme algébrique :

$z_2 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$ donc $\begin{cases} \cos(\theta_2) = 0 \\ \sin(\theta_2) = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$ donc $\boxed{\theta_2 = \frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]}$

$z_3 = (-3+3i)^2$: $|z_3| = \sqrt{(-3)^3+3^2}^2 = 9+9 = \boxed{18}$

$z_3 = 3^2-2\times 3i\times 3+(3i)^2 = 9-18i-9 = -18i$ donc $\begin{cases} \cos(\theta_3) = 0 \\ \sin(\theta_3) = -\frac{18}{18} = -1 \end{cases}$ donc $\boxed{\theta_3 = -\frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]}$

$z_4 = (\sqrt{3}+i)(5+5i\sqrt{3})$: $|z_4| = |\sqrt{3}+i| \times |5+5i\sqrt{3}| = \sqrt{3+1} \times \sqrt{25+25\times 3} = 2\times 10 = \boxed{20}$

$z_4 = 5\sqrt{3} + 5i \times 3 + 5i + 5\sqrt{3}i^2 = 5\sqrt{3} + 15i + 5i - 5\sqrt{3} = 20i$ donc $\boxed{\theta_4 = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$

Autre méthode : $\arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $\arg(5 + 5i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc $\arg(z_4) = \arg(\sqrt{3} + i) \times \arg(5 + 5i\sqrt{3})$

$= \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$z_5 = \frac{1+i}{3\sqrt{3}+3i}$: $|z_5| = \frac{|1+i|}{|3\sqrt{3}+3i|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{9\times 3+9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{36}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6}}$

$$z_5 = \frac{1+i}{3\sqrt{3}+3i} = \frac{(1+i)(3\sqrt{3}-3i)}{9\times 3+9} = \frac{3\sqrt{3} - 3i + 3i\sqrt{3} - 3i^2}{36} = \frac{3\sqrt{3}+3}{36} + \frac{i(3\sqrt{3}-3)}{36} = \frac{\sqrt{3}+1}{12} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{12}$$

La méthode pour déterminer l'argument en utilisant la partie réelle et la partie imaginaire ne fonctionne pas ici car on ne retrouve pas des cosinus et des sinus connus. On peut par contre déterminer l'argument du numérateur et du dénominateur :

Pour $1 + i$: $|1 + i| = \sqrt{2}$ donc $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Pour $3\sqrt{3} + 3i$: $|3\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{36} = 6$ donc $\begin{cases} \cos(\theta') = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta') = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta' = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\arg(z_5) = \arg(1 + i) - \arg(3\sqrt{3} + 3i) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{12} - \dfrac{2\pi}{12} = \boxed{\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]}$

$z_6 = \frac{4i}{-1+i}$: $|z_6| = \frac{|4i|}{|-1+i|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

$z_6 = \frac{4i}{-1+i} = \frac{4i(-1-i)}{2} = 2 - 2i$ donc $\begin{cases} \cos(\theta_6) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_6) = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{\theta_6 = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]}$

Autre méthode en passant par les arguments du numérateur et du dénominateur

Pour $4i$: $\arg(4i) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Pour $-1 + i$: $|-1 + i| = \sqrt{2}$ donc $\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$

$\arg(z_6) = \arg(4i) - \arg(-1 + i) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Exercice 13

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$z_1 = -1 - i$: $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ donc $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$

$z_2 = 5i = \boxed{5\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}$

$z_3 = 1 - i\sqrt{3}$: $|z_3| = \sqrt{1+3} = 2$ donc $z_3 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

$z_4 = (1 - i)(1 + i\sqrt{3})$: $|z_4| = |1 - i| \times |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

$\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ et $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ donc $\arg(z_4) = \arg(1 - i) + \arg(1 + i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$

Donc $\boxed{z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$

$z_5 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^2$: $|z_5| = \frac{|\sqrt{3}-i|^2}{|i|^2} = \frac{3+1}{1} = 4$

$z_5 = \dfrac{3 - 2i\sqrt{3} - 1}{-1} = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(-\dfrac{2}{4} + \dfrac{2i\sqrt{3}}{4}\right) = 4\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{4\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}$

Exercice 14

1) $z^2 = \left(\left(\sqrt{3}+1\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2 = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 + 2i\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) + i^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2i(3-1) - \left(3 - 2\sqrt{3} + 1\right) = \boxed{4\sqrt{3} + 4i}$

2) $|z^2| = \sqrt{16 \times 3 + 16} = \sqrt{64} = \boxed{8}$ (on pouvait aussi calculer le module de z et prendre le carré…)

$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]}$

3) $|z^2| = 8 \Leftrightarrow |z|^2 = 8 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{8} \Leftrightarrow \boxed{|z| = 2\sqrt{2}}$ car $|z| > 0$

$\arg(z^2) = \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{12}\ [\pi]$ donc $\arg(z) = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}[2\pi]$

Or comme la partie réelle et la partie imaginaire de z sont positives, il n'y a que la première possibilité de valable.

donc $\boxed{\arg(z) = \frac{\pi}{12}[2\pi]}$

4) En utilisant $\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}$, on trouve

$$\boxed{\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}}$$